

# 交通路网中的布雷斯悖论及其无秩序代价研究

王爱虎, 唐远华

(华南理工大学 工商管理学院, 广东 广州 510640)

**摘要:** 布雷斯悖论指出新建道路可能反而会降低出行效率。为定量分析布雷斯悖论对路网效率的影响, 选取广州、苏州、加利福尼亚高速公路网定位布雷斯悖论路段, 实证分析不同交通需求下关闭悖论路段后的总出行时间和无秩序代价的变化, 结果表明: 1) 在特定需求下3个路网均存在布雷斯悖论路段, 关闭悖论路段后分别能够缩短0.72%、1.79%、1.51%的总出行时间; 2) 在低需求和高需求下不发生布雷斯悖论, 在中间需求区间内才可能发生布雷斯悖论; 3) 关闭悖论路段不改变无秩序代价曲线的整体形状, 但会局部性地改变无秩序代价的大小。因此需要结合出行量定位布雷斯悖论路段, 通过限流或关闭措施来提升交通路网的出行效率。

**关键词:** 布雷斯悖论; 无秩序代价; 用户均衡; 系统最优

中图分类号: U491.13

文献标志码: A

文章编号: 1007-7375(2022)04-0054-06

## A Research on Braess Paradox and Price of Anarchy in Traffic Networks

WANG Aihu, TANG Yuanhua

(School of Business Administration, South China University of Technology, Guangzhou 510640, China)

**Abstract:** Braess Paradox suggests that new roads may reduce travel efficiency. To quantitatively analyze the impact of Braess Paradox on the efficiency of the road network, the expressway networks of Guangzhou, Suzhou and California are selected to locate Braess Paradox Links; then the change of total travel time and Price of Anarchy after closing paradox links under various traffic demands are empirically analyzed. The results show: 1) Braess Paradox Links exist in all three road networks under specific demands, and the total travel time can be respectively shortened by 0.72%, 1.79%, 1.51% after closing Braess Paradox Links; 2) Braess Paradox does not occur under low demand or high demand, but may occur in the intermediate demand interval; 3) Closing Braess Paradox Link does not change the overall trend of Price of Anarchy curve, but it will locally change Price of Anarchy. Therefore, it is necessary to locate the Braess Paradox Links, and improve the travel efficiency of the road network through measures such as limiting traffic flow or closing the road.

**Key words:** Braess paradox; price of anarchy; user equilibrium; system optimum

随着经济与人口的增长, 我国车辆保有量逐年增大, 但是道路面积有限, 由此引发的交通拥堵问题日益突出, 如何治理交通拥堵成为城市发展的难题<sup>[1-2]</sup>。1968年, Braess<sup>[3]</sup>首次提出布雷斯悖论(Braess paradox), 该悖论指出新建道路可能反而会加剧拥堵, 而新建之后加剧拥堵的道路称为布雷斯悖论路段(下文简称“悖论路段”)。由于布雷斯悖论下, 增大路网容量反而会造成出行时间延长, 因此分析布雷斯悖论带来的影响对治理交通拥堵具有重要意义。

为定量分析不同需求水平下布雷斯悖论对交通系统的影响, 本文以广州、苏州、加利福尼亚高速公路网为例, 在特定需求下定位布雷斯悖论路段; 并计算悖论路段关闭前后的无秩序代价, 探讨交通路网中无秩序代价的动态变化特性, 进一步分析关闭悖论路段带来的效率影响, 从而提出交通管理建议。

论文的贡献如下: 1) 从实证角度出发, 基于3城市高速公路网定位悖论路段, 验证布雷斯悖论在现实中存在的可能性; 2) 分析实际路网的无秩序

收稿日期: 2021-04-24

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(71731006); 教育部哲学社会科学研究重大课题资助项目(17JZD020)

作者简介: 王爱虎(1969—), 男, 河北省人, 教授, 博士, 主要研究方向为物流与供应链管理、工业工程。

代价曲线, 探索无秩序代价随需求的动态变化特性; 3) 比较存在悖论路段和关闭悖论路段后的无秩序代价, 定量分析关闭悖论路段带来的效率改进。

## 1 文献综述

布雷斯悖论解释了资源改善可能造成负面效应的原因<sup>[4]</sup>, 以简单网络来演示悖论的发生过程<sup>[5]</sup>。原始路网为图1(a), 路阻函数(volume delay function)如图中所示, 现有4 000辆车需要从点S到达点D, 一共有两条路径, 分别是S-M-D和S-N-D, 由于两条路径上的路阻函数结构一致, 均为 $\frac{x}{100}$ (其中 $x$ 为路段流量)和45的组合, 因此最终的均衡结果是: 走两条路径的车辆数相等, 各为2 000。所以每辆车的出行时间为 $\left(\frac{2000}{100} + 45\right) = 65 \text{ min}$ 。当新修了一条从M到达N的道路之后, 形成3条路线, 分别是S-M-D、S-M-N-D、S-N-D, 出行时间分别为 $\left(\frac{x}{100} + 45\right) \text{ min}$ 、 $\left(\frac{x}{100} \times 2\right) \text{ min}$ 、 $\left(45 + \frac{x}{100}\right) \text{ min}$ 。因为一共有4 000辆车, 所以 $\frac{x}{100} \leq 40$ , 因此即使当所有用户都选择路线S-M-N-D, 该路线的通行时间为80 min, 仍然小于其他两条路线的通行时间。所以即使在最坏情况下, 所有用户还是会选择走S-M-N-D路线。因此新建道路后的结果是: 用户的出行时间为80 min, 比修路前多15 min<sup>[5]</sup>, 此时用户无法通过单方面的行动来改善处境, 即形成了纳什均衡<sup>[6]</sup>。从示例中可以发现, 资源改善之后路网系统的表现反倒变差了, 这种现象称为布雷斯悖论。

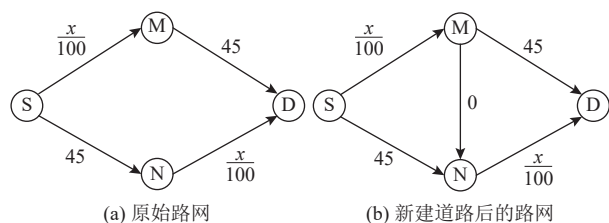


图1 布雷斯悖论的发生过程  
Figure 1 The process of Braess paradox

布雷斯悖论的反直觉结果引发了学者多角度探索的兴趣, 例如探索悖论的发生条件。Bagloee等<sup>[7]</sup>指出布雷斯悖论的存在依赖于用户的路径选择行为, 而用户的路径选择行为是路网结构和出行需求的交互结果, 可以将这两个条件分别看作供给(路网结构)和需求(出行需求), 二者通过调节用户的选择

从而决定悖论是否能够发生。对于给定的路阻函数, 只有出行需求处于特定区间时才会发生悖论, 而区间范围取决于路阻函数<sup>[8-9]</sup>。在实证研究方面, Bagloee等<sup>[10]</sup>以温尼伯路网为例进行悖论路段定位, 发现关闭62条悖论路段后能够减少6 989 min的总出行时间, 相当于建造一英里长的大桥。Ma等<sup>[4]</sup>以航道网络为例进行悖论链接定位, 发现移除悖论链接之后, 能够节省3.8%的总出行时间。

从已有研究来看, 布雷斯悖论的存在让路网系统产生了巨大的效率损失, 而这种效率损失的产生根源是用户的“非合作行为”<sup>[7]</sup>。从用户角度来看, 当每个用户都追求最快路径时形成“用户均衡”状态, 其本质是交通流的纳什均衡<sup>[6]</sup>。但是从整个路网系统的角度来看, 更好的结果应当是用户在选择路线时能够通过合作来减少整个路网的出行总时间, 这种途径形成的交通流结果称为“系统最优”<sup>[7]</sup>。然而, 实际情境中的用户往往是从自身利益出发进行决策, 因此形成的结果通常是用户均衡, 这就导致了实际结果与系统最优之间的差距。Koutsoupas等<sup>[11]</sup>在1999年提出用无秩序代价(price of anarchy, POA)来度量这种差距, 以用户均衡的总成本与系统最优的总成本的比值来表示。

2008年Youn等<sup>[12]</sup>基于波士顿、伦敦和纽约的真实路网, 定位悖论路段, 并计算在不同需求水平下的POA, 发现POA可以高达28%, 表明高POA是一个严重问题。尤其是对于导致低效率的悖论路段, POA值能够反映当悖论路段存在时由于用户非合作行为导致的效率损失, 因此分析路网POA对于认识交通系统特性和提升交通效率具有指导意义。但是目前在布雷斯悖论以及POA方面的研究还存在以下不足: 1) 关闭悖论路段能否降低POA, 目前还没有研究给出答案; 2) 目前除了文献[12]以外, 绝大多数POA的研究基于理论网络分析, 因此对于实际路网中的POA变化特性认识不足。

针对以上不足, 本文将基于实际路网量化布雷斯悖论带来的效率损失, 从实证出发重点探讨以下问题。

- 1) 中国城市高速公路网是否存在发生布雷斯悖论的可能?
- 2) POA随需求的变化有何规律? 关闭悖论路段能否改变POA曲线?
- 3) 能够提供哪些交通管理启示?

## 2 模型和方法

### 2.1 交通流分配模型

交通流分配的任务是按照特定原理将车流量分配到各条出行路径中,目前广泛认可的原理是Wardrop第一原理和第二原理。Wardrop第一原理认为用户以自身出行时间最短为目标,独立地作出路径选择决策,即用户均衡(user equilibrium);Wardrop第二原理认为存在一个集中指挥者,该指挥者以最小化整个系统的出行总时间为目标来指挥所有用户的路径选择,即系统最优(system optimum)<sup>[13]</sup>。其中用户均衡交通流分配模型<sup>[13-14]</sup>的结构如下。

$$\min z(x) = \sum_a \int_0^{x_a} t_a(x) dx. \quad (1)$$

s.t.

$$\sum_k f_k^w = q^w; \quad (2)$$

$$f_k^w \geq 0, \forall k, w; \quad (3)$$

$$x_a = \sum_w \sum_k f_k^w \delta_{a,k}^w, \forall a. \quad (4)$$

式中,  $x_a$ 为路段 $a$ 的路段流量;  $t_a(x)$ 为路段 $a$ 的路阻函数;  $q^w$ 为起点-终点对(origin-destination, OD) $w$ 的出行需求;  $f_k^w$ 为OD对 $w$ 之间第 $k$ 条路径的流量;  $\delta_{a,k}^w$ 为包含关系变量。当路径 $k$ 中包含路段 $a$ 时,  $\delta_{a,k}^w=1$ ; 反之,  $\delta_{a,k}^w=0$ 。

式(2)保证了OD对 $w$ 之间所有路径流量的和等于总需求; 式(3)要求每一条路径上的流量是非负的; 式(4)根据路径流量的分布计算出所有路段上的流量。求解上述模型可以获得用户均衡条件下的交通流分布<sup>[13]</sup>。

系统最优交通流分配模型<sup>[13]</sup>的结构如下。

$$\min \bar{z}(x) = \sum_a x_a t_a(x). \quad (5)$$

s.t.

$$\sum_k f_k^w = q^w; \quad (6)$$

$$f_k^w \geq 0, \forall k, w; \quad (7)$$

$$x_a = \sum_w \sum_k f_k^w \delta_{a,k}^w, \forall a. \quad (8)$$

系统最优交通流分配的目标函数是所有路段流

量乘以对应路阻函数的和,约束条件与用户均衡交通流分配一致。求解上述模型可以获得系统最优条件下的交通流分布<sup>[13]</sup>。

### 2.2 布雷斯悖论路段定位方法

在悖论路段的识别定位过程中,需要计算各个路段在一定车流量下的通行时间,因此首先需要确定路阻函数。美国联邦公路局基于大量的交通调查得出道路车流量与通行时间之间的关系,并形成了目前广泛使用的路阻函数模型,即美国联邦公路局函数(Bureau of Public Roads, BPR)<sup>[15]</sup>。

$$t_a(x_a) = t_a^0 \left( 1 + \alpha \left( \frac{x_a}{C_a} \right)^\beta \right). \quad (9)$$

式中,  $t_a^0$ 是路段 $a$ 在自由流状态下的通行时间;  $x_a$ 是路段 $a$ 的路段流量;  $C_a$ 是路段 $a$ 的通行能力;  $\alpha$ 、 $\beta$ 均为参数,参考文献<sup>[16]</sup>:  $\alpha=0.15$ ,  $\beta=4$ 。后续将根据BPR函数计算路段的通行时间。

确定路阻函数后,将路网结构、路网参数、出行OD作为输入数据,基于Frank Wolfe算法<sup>[17]</sup>,利用Python进行交通分配得到原始路网下的出行总时间 $T_0$ ;并依次关闭1条路段,设关闭的路段为路段 $n$ ,计算关闭路段 $n$ 后的出行总时间 $T_n$ ,如果 $T_n < T_0$ ,表明路段 $n$ 是悖论路段,反之路段 $n$ 不是悖论路段。

### 2.3 POA计算公式

令 $x_a^{\text{UE}}$ 、 $x_a^{\text{SO}}$ 分别表示用户均衡、系统最优模型求解得到的路段流量结果,  $\sum_a x_a^{\text{UE}} t_a(x_a^{\text{UE}})$ 、 $\sum_a x_a^{\text{SO}} t_a(x_a^{\text{SO}})$ 分别表示用户均衡、系统最优状态下的出行总时间。无秩序代价是指用户均衡状态的成本与系统最优状态的成本之间的比率,该比率刻画了用户非合作情况下的效率损失<sup>[12]</sup>,表达式如下。

$$\text{POA} = \frac{\sum_a x_a^{\text{UE}} t_a(x_a^{\text{UE}})}{\sum_a x_a^{\text{SO}} t_a(x_a^{\text{SO}})}. \quad (10)$$

## 3 实证结果分析

本节以中国广州和苏州,结合美国加利福尼亚的高速公路网,验证实际路网中存在布雷斯悖论;并分析POA随需求变化的动态特性,以及比较关闭悖论路段后的POA曲线变化规律。

3.1 悖论路段定位

3.1.1 确定路网结构和路网参数

首先, 从OpenStreetMap网站下载高速公路网矢量数据, 导入ArcGIS软件中进行处理, 取得符合要求的路网拓扑和路段长度; 然后, 基于路网结构和

公路编码, 借助高德地图进行路名匹配, 得到各个路段的名称; 最后, 根据路段名称查找对应高速公路的车道数和自由流速度, 并参考《公路通行能力手册》计算路段通行能力和自由流时间<sup>[18]</sup>, 得到路网参数。处理后广州、苏州、加利福尼亚路网如图2。

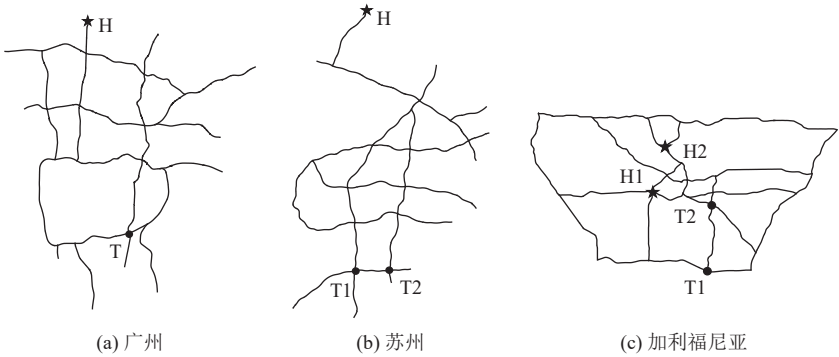


图2 高速公路网结构  
Figure 2 Structure of expressway networks

3.1.2 确定出行OD

广州路网的出行OD为1对: T-H; 苏州路网的出行OD为2对: T1-H和T2-H; 加利福尼亚的出行OD为4对: T1-H1、T1-H2、T2-H1、T2-H2。为寻找发生布雷斯悖论的需求区间, 设置由低向高逐次加大的出行需求量, 在各个需求量下定位悖论路段。即在路网结构、路网参数和出行OD的基础上, 改变各对出行OD之间的需求量, 重复进行交通流分配, 直至发现悖论路段, 并记录下对应的需求量。结果如表1。当各路网的出行OD处于以下需求量时会发生布雷斯悖论。其中, 需求量的单位为veh/h, 表示辆/h。

表1 发生布雷斯悖论时的需求水平

Table 1 Demand of occurring Braess paradox		
路网	OD	需求量/(10 <sup>3</sup> 辆·h <sup>-1</sup> )
广州路网	T-H	0.8
苏州路网	T1-H	0.5
	T2-H	0.5
加利福尼亚路网	T1-H1	0.9
	T1-H2	0.9
	T2-H1	0.9
	T2-H2	0.9

在上述需求水平下, 各个路网的悖论路段如表2和图3。广州路网存在1条悖论路段, 关闭之后能减少0.72%的总出行时间; 苏州路网存在1条悖论路

段, 关闭之后能减少1.79%的总出行时间; 加利福尼亚路网存在2条悖论路段, 关闭之后分别能减少1.51%、1.09%的总出行时间。实证表明, 在特定出行需求下, 不同路网结构和OD对之间都可能发生布雷斯悖论, 导致交通效率的损失, 其结果与Bagloece等<sup>[10]</sup>一致。

表2 关闭悖论路段减少的总出行时间  
Table 2 Total time reduced by closing the paradox link

路网	悖论路段	$\Delta T/h$	$\Delta T/\%$
广州路网	A-B	28.49	0.72
苏州路网	C-D	409.55	1.79
加利福尼亚路网	E-F	233.32	1.51
	G-H	168.34	1.09

3.2 无秩序代价分析

根据上文的研究结果可知, 3个路网在一定的需求水平下会发生布雷斯悖论。但是出行需求是动态变化的, 那么当需求量发生变化时, 路网效率如何变化? 接下来计算关闭悖论路段前后不同需求下的POA(对于存在1条以上悖论路段的路网, 只关闭 $\Delta T\%$ 最大的悖论路段), 结果如图4。

由图4可以得到以下结论。

- 1) 高需求和低需求下不发生布雷斯悖论, 在中间需求下才有可能发生悖论。
- 在足够低的需求下POA等于1, 在足够高的需求下POA无限趋于1, 而在中间需求下POA显著大于



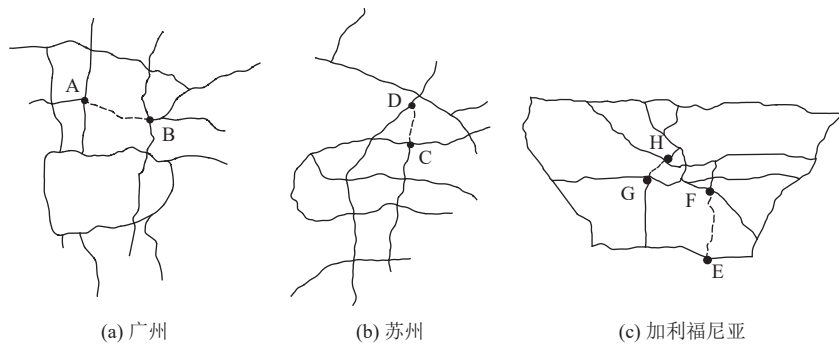


图3 悖论路段定位结果

Figure 3 Results of paradox links

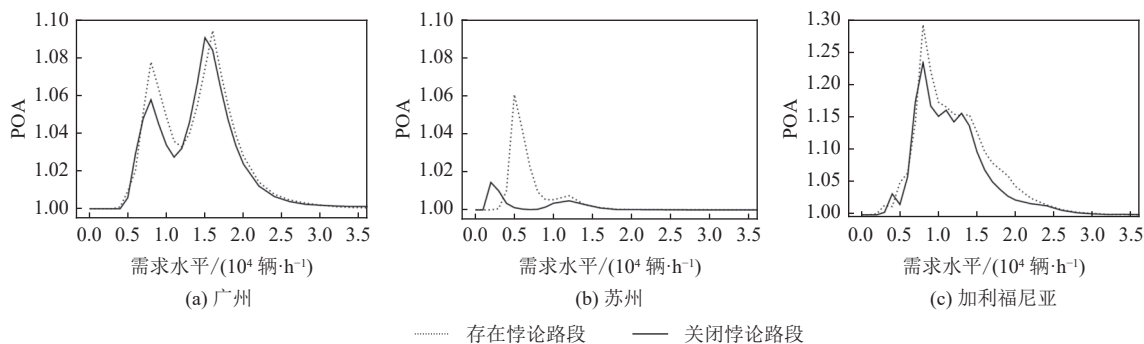


图4 关闭悖论路段后的POA曲线

Figure 4 POA curves without the paradox link

1. 虽然3个路网的峰数及峰值有所不同,但一致的是3个路网的POA曲线均呈“中间高两头低”的形态。

由文献综述部分已知,布雷斯悖论的发生是因为用户均衡和系统最优的结果存在差距,即只有POA大于1才有可能发生布雷斯悖论。因此上述结果表明在低需求和高需求下都不会发生布雷斯悖论,在中间需求水平下才具备发生布雷斯悖论的条件。

Youn等<sup>[12]</sup>基于纽约路网的仿真发现POA值先是随着车流量的增大而上升,到达一定值之后开始下降并无限趋于1,即在低需求和高需求下都不会因为用户的非合作行为产生明显的效率损失,只有当需求量处于中间水平时才会产生较大的效率损失,本文结论与文献<sup>[12]</sup>的结论基本一致。

2) 关闭悖论路段后POA曲线的整体形态基本不变,但局部POA有变化。

关闭悖论路段后的广州路网POA曲线仍然存在两个峰,苏州的POA曲线仍然只有1个明显的峰值,加利福尼亚路网仍然存在一个主峰和紧随主峰之后的小幅度波动。此外,3个路网的POA曲线呈现“中间高两头低”的形态,说明关闭悖论路段不会根本性地改变POA曲线的走势。但关闭悖论路段后

部分需求下的POA值低于关闭悖论路段前,相反部分需求下的POA值高于关闭悖论路段前。该结果说明关闭悖论路段的效果会随着需求水平的变化而变化,对于不同的需求水平,关闭悖论路段带来的效率变化存在差距甚至相反。

## 4 结论

本文以广州、苏州、加利福尼亚高速公路网为例,验证了在特定出行需求下,3个路网中均存在布雷斯悖论路段,关闭后3个路网分别能减少0.72%、1.79%、1.51%的总出行时间,并分析了存在悖论路段时POA随需求量的变化,发现3个路网的结果一致:POA曲线均呈现“中间高两头低”的形态,即在中间需求下才有发生布雷斯悖论的可能;而关闭悖论路段之后,路网POA曲线的总体形态不变,但是局部需求下的POA值表现为增大或减小,即关闭悖论路段可以在一定程度上调整用户均衡和系统最优之间的差距。

因此在交通管理中,可以实时监控各路段的POA值,结合出行量识别路网中的悖论路段,通过

关闭或限流等措施避免或削弱悖论路段的影响, 以更快的响应速度提高路网系统的出行效率。另一方面, 在前期路网规划中, 更需要基于城市内重点区域间的车流量规模预测, 分析新建道路是否会导致路网系统发生布雷斯悖论, 避免布雷斯悖论带来的效率损失。

未来的研究可以进一步改进悖论路段定位算法, 从定位悖论路段转化为定位悖论路段组合, 并补充随机用户均衡模型的分析, 从而与用户均衡模型的运行结果相比较, 分析有限理性是否会给研究结果带来显著影响。

#### 参考文献:

- [1] 傅惠, 伍乃骐, 胡刚. 城市交通系统管理与优化研究综述[J]. *工业工程*, 2016, 19(1): 10-15.  
FU Hui, WU Naiqi, HU Gang. An overview of management and optimization of urban transportation system[J]. *Industrial Engineering Journal*, 2016, 19(1): 10-15.
- [2] 曹振宇, 蒋阳升, 罗孝羚, 等. 中小城市直达公交网络优化[J]. *工业工程*, 2020, 23(6): 117-123.  
CAO Zhenyu, JIANG Yangsheng, LUO Xiaoling, et al. A direct optimization in urban transit network for small and medium-sized cities[J]. *Industrial Engineering Journal*, 2020, 23(6): 117-123.
- [3] BRAESS D. Über ein paradoxon aus der verkehrsplanung[J]. *Unternehmensforschung*, 1968, 12(1): 258-268.
- [4] MA C, CAI Q, ALAM S, et al. Airway network management using Braess's paradox[J]. *Transportation Research*, 2019, 105: 565-579.
- [5] ESLEY D, KLEINBERG J. 网络、群体和市场[M]. 李晓明, 等译. 北京: 清华大学出版社, 2011: 147-148.
- [6] ROUGHGARDEN T, TARDOS É. How bad is selfish routing?[J]. *Journal of the ACM (JACM)*, 2002, 49(2): 236-259.
- [7] BAGLOEE S A, CEDER A A, SARVI M, et al. Is it time to go for no-car zone policies? Braess paradox detection[J]. *Transportation Research Part A: Policy and Practice*, 2019, 121: 251-264.
- [8] WANG W W, WANG D Z, SUN H, et al. Braess paradox of traffic networks with mixed equilibrium behaviors[J]. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, 2016, 93: 95-114.
- [9] PAS E I, PRINCIPIO S L. Braess' paradox: some new insights[J]. *Transportation Research Part B: Methodological*, 1997, 31(3): 265-276.
- [10] BAGLOEE S A, CEDER A A, TAVANA M, et al. A heuristic methodology to tackle the Braess paradox detecting problem tailored for real road networks[J]. *Transportmetrica A: Transport Science*, 2014, 10(5): 437-456.
- [11] KOUTSOPIAS E, PAPADIMITRIOU C. Worst-case equilibria[M]. Berlin: Springer, 1999: 404-413.
- [12] YOUN H, GASTNER M T, JEONG H. Price of anarchy in transportation networks: efficiency and optimality control [J/OL]. *Physical Review Letters*, 2008, (2008-11-17). <http://doi.org/10.1103/PhysRevlett.101.128701>.
- [13] 程琳. 城市交通网络流理论[M]. 南京: 东南大学出版社, 2010: 20-31.
- [14] BECKMANN M J, MEGUIRE C R, WINSTEN C B. Studies in economics of transportation[M]. New Haven: Yale University Press, 1956.
- [15] 陈旭, 陆丽丽, 曹祖平, 等. 道路阻抗函数研究综述[J]. *交通运输研究*, 2020, 6(2): 30-39.  
CHEN Xu, LU Lili, CAO Zuping, et al. Review of studies on road impedance functions[J]. *Transport Research*, 2020, 6(2): 30-39.
- [16] 刘晓磊, 段征宇, 仲小飞. 扬子江城市群高速公路网交通需求和空间联系结构分析[J]. *交通与运输*, 2020, 36(4): 5-10.  
LIU Xiaolei, DUAN Zhengyu, ZHONG Xiaofei. Traffic demand and spatial structure analysis of Yangtze River agglomeration expressway network[J]. *Traffic & Transportation*, 2020, 36(4): 5-10.
- [17] ZHENG L. User equilibrium solution[DB/OL]. (2020-06-26). <https://github.com/ZhengLi95/User-Equilibrium-Solution>, 2020.
- [18] 周荣贵. 公路通行能力手册[M]. 北京: 人民交通出版社, 2017.

(责任编辑: 刘敏仪)