

监控不合格品率的MEWMA- p 控制图设计

朱永忠, 丁辉

(河海大学 理学院, 江苏 南京 211100)

摘要: 传统Shewhart- p 控制图只对单一属性的不合格品率进行监控, 在过程发生偏移时有一定的滞后性。为提高不合格品率控制图的精度, 提出一种多元指数加权移动平均不合格品率 (multivariate exponentially weighted moving average p , MEWMA- p)控制图。该控制图将多个属性的不合格品率应用于多元指数加权移动平均控制图, 可同时对多个属性进行监控, 并且对于小范围的偏移更加敏感。对比分析同等偏移程度下指数加权移动平均不合格品率 (exponentially weighted moving average p , EWMA- p) 控制图与MEWMA- p 控制图的平均运行长度 (average run length, ARL) 结果, 并通过模拟仿真说明该方法的有效性。

关键词: 休哈特不合格品率控制图; 多元指数加权移动平均控制图; 平均运行长度

中图分类号: O212

文献标志码: A

文章编号: 1007-7375(2023)01-0130-06

MEWMA- p Chart to Monitor Percent Defective

ZHU Yongzhong, DING Hui

(College of Science, Hohai University, Nanjing 211100, China)

Abstract: The traditional Shewhart- p control chart only monitors the percent defective of a single property and has a certain lag in the process offset. A multivariate exponentially weighted moving average p (MEWMA- p) control chart is proposed to improve the accuracy of the percent defective control chart. The control chart applies the percent defective of multiple properties to the multivariate exponentially weighted moving average (MEWMA) control chart, which can monitor multiple properties at the same time and is more sensitive to small ranges of shift. The average run length (ARL) table of exponentially weighted moving average p (EWMA- p) control chart and MEWMA- p control chart is studied and compared at the same offset degree, and the validity of this method is verified by simulation.

Key words: Shewhart- p control chart; multivariate exponentially weighted moving average control chart; average run length

统计过程控制的作用是监控过程和检测变化, 通过快速确定过程偏移并进行调整, 以保持生产过程在控制中保证高水平的生产质量。

第一个控制图是1924年由Shewhart提出的一个缺陷百分比图。不久之后, 他便给出了著名的 \bar{X} 控制图。20世纪40年代, Hotelling建立多元控制图, 在 $\chi^2 = \mathbf{X}_i^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{X}_i > h$ 时失控, 其中 $h > 0$ 是所设定的控制限^[1]。20世纪50年代, Roberts^[2]提出著名的指数加权移动平均 (exponentially weighted moving average, EWMA)控制图, 通过调整平滑系数使控制图对小偏移敏感。1972年, Brook等^[3]提出累积和控制图,

后来Crosier^[4]在其基础上发展了多元累计和(multivariate cumulative sum, MCUSUM)控制图。1992年, Lowry等^[5]结合多元控制图与EWMA控制图开发了多元指数加权移动平均 (multivariate exponentially weighted moving average, MEWMA)控制图。现有大多数多元控制图都是由Shewhart控制图、MCUSUM控制图和MEWMA控制图扩展而成。

大多数控制图通过样本均值和样本标准差直接监测过程均值 μ 和方差 Σ 的偏移。Krumbholz等^[6]构造了一个新的Shewhart- p 控制图, 这种方法并不是监测 μ 和 Σ 本身, 而是监测 μ 和 Σ 的一个函数关系, 即不

收稿日期: 2022-01-23

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11771120)

作者简介: 朱永忠(1968—), 男, 江西省人, 教授, 博士, 主要研究方向为概率论与数理统计。

合格品率 p 。不合格品率控制图是计数值控制图, 虽然有关计数值控制图的研究较少, 但其有特定的使用场合, 例如当控制对象为产品不合格率、交货延迟率、缺勤率时, 适合用 p 控制图。Krumbholz等^[6]指出, 对于给定的规格界限, 为不合格品率 p 设置目标值 p_0 相较于为 μ 和 Σ 设置目标值 μ_0 和 Σ_0 更合理。Wu等^[7]也考虑了与监测 μ 和 Σ 的函数关系类似的方法, 基于加权损失函数建立一种累计和 (cumulative sum, CUSUM) 控制图。Wu等^[8]指出, 在特定条件下, 只要不合格品率 p 在给定范围内, μ 和 Σ 的偏移就不会太大。将 p 图与EWMA控制图结合起来对于监视小的偏移非常有用, 因此Gan^[9]创建指数加权移动平均不合格品数 (exponentially weighted moving average np , EWMA- np) 控制图, 并利用马尔可夫链计算出其失控情况下的平均运行长度 (average run length, ARL)。Knoth等^[10]创建EWMA- p 控制图, 并且证明它相较于传统的Shewart- p 控制图灵敏很多。Cozzucoli^[11]将 p 控制图与多元控制图联系起来, 设计一种多元 p 控制图, 将不合格品率 p 分为多个区间并且给每个小区间增加对应的权重。该控制图虽然可以对不合格品率进行很好的控制, 但并没有对不同属性间的相关性加以分析。过程能力指数过高或者过低都会对生产效益产生负面影响, 王斌会等^[12]从不合格品率入手分别建立过程受控和过程失控时的过程能力指数模型。赵凯等^[13]用主成分分析法将多元过程降维, 利用各分量的概率密度函数, 对不合格品率进行推导, 以提高过程能力。较低的不合格品率是好的过程能力的必要条件, 二者紧密关联却有本质上的区别, 陶靖轩^[14]证明对不合格品率进行限制只是保证过程能力的一个较低要求。

本文在Knoth和Steinmetz的基础上设计一种多元不合格品率控制图, 并且应用于MEWMA, 通过对比ARL以及模拟仿真说明其优越性。

1 相关理论简介

1.1 Shewhart- p 控制图

假设 $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ 是一组来自正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 且相互独立的样本, 记变量 X 的规格上限为USL, 规格下限为LSL, 不合格品率 p 定义为

$$p = h(\mu) = \Phi\left(\frac{LSL - \mu}{\sigma}\right) + \Phi\left(\frac{\mu - USL}{\sigma}\right). \quad (1)$$

其中, Φ 为标准正态分布的分布函数。

假设 $\{X_{t1}, X_{t2}, \dots, X_{tn}\}$ 为 t 时刻的抽样, 记 $\bar{X}_t = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{ti}$ 为样本均值, 则 t 时刻的不合格品率 p 的极大似然估计为

$$\hat{p}_t = h(\bar{X}_t) = \Phi\left(\frac{LSL - \bar{X}_t}{\sigma}\right) + \Phi\left(\frac{\bar{X}_t - USL}{\sigma}\right). \quad (2)$$

这就是Shewhart- p 控制图的统计量。Shewhart- p 控制图是一个单侧控制图, 上控制限为

$$c_p = h\left[\mu^* + c_x \left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)\right]. \quad (3)$$

其中, $\mu^* = \frac{LSL + USL}{2}$; c_x 是根据受控时的ARL设定的一个常数, 若 $ARL_0 = A$, 则 $c_x = \Phi^{-1}\left(1 - \frac{1}{2A}\right)$ 。

1.2 MEWMA控制图

在多元情况下, 设 t 时刻采样数据为 $\mathbf{X}_t = (x_{t1}, x_{t2}, \dots, x_{tq})^T$, \mathbf{X}_t 服从 q 元正态分布, 均值向量为 $\boldsymbol{\mu}_0$, 协方差矩阵为 $\boldsymbol{\Sigma}_0$ 。记MEWMA控制图的统计量为 \mathbf{Z} , 其表达式为

$$\begin{cases} \mathbf{Z}_0 = \mathbf{0}; \\ \mathbf{Z}_t = r\mathbf{X}_t + (1-r)\mathbf{Z}_{t-1}. \end{cases} \quad (4)$$

其中, r 为MEWMA控制图的平滑系数。当过程发生偏移时, 其偏移系数为

$$\delta = (\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}_0)^T \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} (\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}_0). \quad (5)$$

式中, $\boldsymbol{\mu}$ 为偏移后的均值向量。已证明MEWMA控制图的ARL只与过程偏移系数有关, 而与过程偏移后的均值向量无关^[15]。

MEWMA控制图的统计量为

$$Q_t = \mathbf{Z}_t^T \boldsymbol{\Sigma}_z^{-1} \mathbf{Z}_t. \quad (6)$$

其中, $\boldsymbol{\Sigma}_z = \frac{r}{2-r} \boldsymbol{\Sigma}_0$; 当 $Q_t > h$ 时, 表示发出失控警报; h 为给定初始ARL时的控制限, 通常取此时的平均运行链长 $ARL_0 = 370.4$ 。

2 MEWMA- p 控制图设计

设 t 时刻采样数据为 $\mathbf{X}_t = (\mathbf{X}_{t1}, \mathbf{X}_{t2}, \dots, \mathbf{X}_{tn})^T$, 其中, $\mathbf{X}_{ti} = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{iqi})^T$ 服从 q 元正态分布。单个属性的不合格品率及极大似然估计如式(1)和式(2)中定义。记 t 时刻的不合格品率为 $\mathbf{p}_t = (p_{t1}, p_{t2}, \dots, p_{tq})^T$, $\boldsymbol{\mu}_p$ 和 $\boldsymbol{\Sigma}_p$ 分别表示其均值向量和协方差矩阵。参照Hotelling T^2 控制图, 多元不合格品率控制图的统计量 T^2 可表示为

$$T^2 = (\mathbf{p}_t - \boldsymbol{\mu}_p)^T \boldsymbol{\Sigma}_p^{-1} (\mathbf{p}_t - \boldsymbol{\mu}_p). \quad (7)$$

若取虚报的概率为 α ，则此时多元不合格品率控制图的控制上限和控制下限可分别表示为

$$\begin{cases} \text{UCL} = \frac{(n-1)^2}{n} \text{Be}_\alpha\left(\frac{q}{2}, \frac{n-q-1}{2}\right); \\ \text{LCL} = 0. \end{cases} \quad (8)$$

上述多元不合格品率控制图是将多项属性的监控综合起来的一种方法，考虑到属性间的相关性，但是并没有应用到历史数据，对小偏移不敏感。为解决上述问题，可将多元不合格品率控制图与MEWMA控制图结合构建新的MEWMA- p 控制图。

在 t 时刻抽取 n 个样本，考察样本的 q 个属性，可得到 $\mathbf{p}_t = (p_{1t}, p_{2t}, \dots, p_{qt})^T$ ，令

$$\begin{cases} \mathbf{Z}_t = \mathbf{R}\mathbf{p}_t + (\mathbf{I} - \mathbf{R})\mathbf{Z}_{t-1}; \\ \mathbf{Z}_0 = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (9)$$

其中， \mathbf{I} 为 q 阶单位矩阵； \mathbf{R} 为对角元素为 r_1, r_2, \dots, r_q 的对角矩阵。 r_1, r_2, \dots, r_q 在实际应用中可根据不同属性的权重来决定，在没有特别需要的前提下，令 $r_1 = r_2 = \dots = r_q = r$ ，可简化为

$$\begin{cases} \mathbf{Z}_t = r\mathbf{p}_t + (1-r)\mathbf{Z}_{t-1}; \\ \mathbf{Z}_0 = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (10)$$

若 \mathbf{p}_t 的协方差矩阵为 $\boldsymbol{\Sigma}_p$ ，则 \mathbf{Z}_t 的协方差矩阵可近似取

$$\boldsymbol{\Sigma}_Z = \frac{r}{2-r} \boldsymbol{\Sigma}_p. \quad (11)$$

MEWMA- p 控制图的统计量为

$$Q_t = \mathbf{Z}_t^T \boldsymbol{\Sigma}_Z^{-1} \mathbf{Z}_t. \quad (12)$$

当 $Q_t > h$ 时，表示过程出现异常。 h 为给定初始ARL时的控制限，通常取此时的平均运行链长 $\text{ARL}_0 = 370.4$ 。

3 MEWMA- p 控制图性能比较

ARL是评价控制图性能的一个重要指标，计算ARL是控制图参数优化设计、性能评价及应用的重要步骤。Brook等^[3]在1972年提出应用马尔可夫链来计算控制图ARL的思想，Runger等^[16]将其扩展到多元控制图的ARL计算中。Crowder^[17]最早提出通过解积分方程的方法来求取EWMA控制图的ARL。

通过比较EWMA- p 控制图与MEWMA- p 控制图在发生同等程度偏移的情况下的ARL来说明MEWMA-

p 控制图更为灵敏。计算EWMA与MEWMA的控制限，使得两种控制图在未发生偏移时的ARL均为370.4。Knoth^[18]的R语言函数mewma.crit可用来计算给定 ARL_0 时的MEWMA控制图的控制限。结果如表1所示。

表 1 $\text{ARL}_0=370.4$ 时3种控制图的控制限

Table 1 The control limit of the three control charts when $\text{ARL}_0=370.4$

平滑系数 λ	EWMA	二元MEWMA	三元MEWMA
0.2	2.764	11.012	13.331
0.4	2.838	11.601	13.933
0.6	2.849	11.769	14.099
0.8	2.834	11.819	14.147

假设样本的 q 个属性具有相同的初始均值 $\boldsymbol{\mu}_0$ ，且发生了相同程度的偏移。根据MEWMA控制图的ARL只与偏移系数 $\delta = (\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}_0)^T \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} (\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}_0)$ 有关，记 $\boldsymbol{\mu} = (X_1, X_2, \dots, X_q)^T$ ， $\boldsymbol{\mu}_0 = (X_1^0, X_2^0, \dots, X_q^0)^T$ ， $\boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} =$

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1q} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2q} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{q1} & A_{q2} & \dots & A_{qq} \end{pmatrix}, \text{ 则偏移系数为}$$

$$\delta = (\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}_0)^T \boldsymbol{\Sigma}_0^{-1} (\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}_0) = \sum_{i,j} A_{ij} (X_i - X_i^0)^2. \quad (13)$$

记 $K = \sum_{i,j} A_{ij}$ ，可以得到MEWMA- p 和EWMA- p

发生偏移的对应关系，即

$$\delta = K(X_1 - X_1^0)^2. \quad (14)$$

在发生相同程度偏移时，均值偏移和偏移系数所对应的关系如表2所示。再采用蒙特卡洛模拟来计算对应EWMA和MEWMA的ARL。表3中给出不同程度的均值偏移EWMA控制图的ARL，表4~6中给出 K 分别为30、60、90时对应的二元MEWMA控制图的ARL，表7~9中给出 K 分别为30、60、90时对应的三元MEWMA控制图的ARL。

表 2 不同均值偏移所对应的偏移系数

Table 2 The noncentrality parameter corresponding to the mean shift

μ	$K=30$	$K=60$	$K=90$
0.05	0.075	0.150	0.225
0.10	0.300	0.600	0.900
0.15	0.675	1.350	2.025
0.20	1.200	2.400	3.600
0.25	1.875	3.750	5.625
0.30	2.700	5.400	8.100

表 3 对于不同程度均值偏移EWMA的ARL

Table 3 ARL of EWMA with varying degrees of mean shift

μ	$\lambda = 0.2$	$\lambda = 0.4$	$\lambda = 0.6$	$\lambda = 0.8$
0	370.986	370.433	370.139	369.968
0.05	269.874	289.487	302.201	311.411
0.10	199.026	227.647	247.604	262.771
0.15	148.915	180.199	203.622	222.290
0.20	113.117	143.628	168.099	188.534
0.25	87.273	115.306	139.332	160.328
0.30	68.408	93.263	115.971	136.712

表 4 对于不同偏移系数 $K = 30$ 时二元MEWMA的ARL

Table 4 ARL of binary MEWMA with different noncentrality parameters when $K=30$

δ	$\lambda = 0.2$	$\lambda = 0.4$	$\lambda = 0.6$	$\lambda = 0.8$
0	370.480	370.442	370.403	370.420
0.075	334.585	349.707	357.100	361.472
0.300	121.635	180.026	225.166	261.049
0.675	26.053	43.983	69.448	101.548
1.200	8.667	11.037	16.609	26.673
1.875	4.464	4.383	5.187	7.204
2.700	2.883	2.508	2.462	2.710

表 5 对于不同偏移系数 $K = 60$ 时二元MEWMA的ARL

Table 5 ARL of binary MEWMA with different noncentrality parameters when $K = 60$

δ	$\lambda = 0.2$	$\lambda = 0.4$	$\lambda = 0.6$	$\lambda = 0.8$
0	370.480	370.442	370.403	370.420
0.150	254.343	298.111	321.706	336.723
0.600	33.311	57.142	88.037	124.217
1.350	7.158	8.442	12.056	19.076
2.400	3.292	2.949	3.053	3.624
3.750	2.102	1.701	1.494	1.429
5.400	1.516	1.106	1.039	1.023

表 6 对于不同偏移系数 $K = 90$ 时二元MEWMA的ARL

Table 6 ARL of binary MEWMA with different noncentrality parameters when $K = 90$

δ	$\lambda = 0.2$	$\lambda = 0.4$	$\lambda = 0.6$	$\lambda = 0.8$
0	370.480	370.442	370.403	370.420
0.225	177.767	236.470	274.406	301.275
0.900	14.576	22.118	35.557	55.864
2.025	4.043	3.840	4.347	5.764
3.600	2.172	1.782	1.580	1.524
5.625	1.427	1.071	1.023	1.013
8.100	1.004	1.000	1.000	1.000

表 7 对于不同偏移系数 $K = 30$ 时三元MEWMA的ARL

Table 7 ARL of ternary MEWMA with different noncentrality parameters when $K = 30$

δ	$\lambda = 0.2$	$\lambda = 0.4$	$\lambda = 0.6$	$\lambda = 0.8$
0	370.446	370.319	370.368	370.441
0.075	341.070	354.362	360.266	363.701
0.300	142.218	205.250	249.436	282.088
0.675	30.827	54.700	86.880	124.847
1.200	9.716	13.134	20.921	34.681
1.875	4.877	4.907	6.100	9.014
2.700	3.115	2.722	2.737	3.147

表 8 对于不同偏移系数 $K = 60$ 时三元MEWMA的ARL

Table 8 ARL of ternary MEWMA with different noncentrality parameters when $K=60$

δ	$\lambda = 0.2$	$\lambda = 0.4$	$\lambda = 0.6$	$\lambda = 0.8$
0	370.446	370.319	370.368	370.441
0.150	273.059	312.682	332.478	344.609
0.600	39.744	70.794	108.597	149.749
1.350	7.955	9.876	14.981	24.752
2.400	3.568	3.226	3.447	4.314
3.750	2.228	1.838	1.619	1.557
5.400	1.696	1.175	1.065	1.038

表 9 对于不同偏移系数 $K = 90$ 时三元MEWMA的ARL

Table 9 ARL of ternary MEWMA with different noncentrality parameters when $K = 90$

δ	$\lambda = 0.2$	$\lambda = 0.4$	$\lambda = 0.6$	$\lambda = 0.8$
0	370.446	370.319	370.368	370.441
0.225	200.677	258.876	293.202	316.135
0.900	16.780	27.228	45.303	71.427
2.025	4.405	4.264	5.043	7.110
3.600	2.311	1.922	1.717	1.674
5.625	1.614	1.124	1.041	1.023
8.100	1.015	1.000	1.000	1.000

由结果可见, K 值越大, MEWMA控制图表现越好。以二元MEWMA- p 控制图为例来说明其实际意义。令所研究的两个属性的不合格品率协方差矩阵为 $\Sigma_0 = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix}$, 假设 $D_{11}=D_{22}$, 根据不同的 D_{11} 和 D_{12} 的值可以计算出不同的 K 值, 如表10~12所示。

由结果可见, 当 D_{12} 为正时, D_{11} 越小, K 值越大; 固定 D_{11} 不变, D_{12} 越小, K 值越大。当 D_{12} 为负时, D_{11}

越小, K 值越大; 固定 D_{11} 不变, D_{12} 越小, K 值越大。结合到实际情况, 当两个属性的不合格品率为正相关或负相关时, 其不合格品率的自协方差与互协方差越小, MEWMA- p 控制图相对于EWMA- p 控制图越灵敏。

表 10 D_{12} 固定, D_{11} 取值变化时的 K 值

Table 10 The K value when D_{12} is fixed, D_{11} is changed

D_{12}	$D_{11} = 0.1$	$D_{11} = 0.2$	$D_{11} = 0.3$	$D_{11} = 0.4$	$D_{11} = 0.5$
0.05	13.33	8.00	5.71	4.44	3.64
-0.05	40.00	13.33	8.00	5.71	4.44

表 11 D_{11} 固定, D_{12} 取值变化且 $D_{12} > 0$ 时的 K 值

Table 11 The K value when D_{11} is fixed, D_{12} is changed and $D_{12} > 0$

D_{11}	$D_{12} = 0.1$	$D_{12} = 0.01$	$D_{12} = 0.001$
0.5	3.33	3.92	3.99

表 12 D_{11} 固定, D_{12} 取值变化且 $D_{12} < 0$ 时的 K 值

Table 12 The K value when D_{11} is fixed, D_{12} is changed and $D_{12} < 0$

D_{11}	$D_{12} = -0.1$	$D_{12} = -0.01$	$D_{12} = -0.001$
0.5	5.00	4.08	4.01

已有的各种不合格品率控制图都对单一属性进行监测, 并以此结果来判断过程是否发生偏移。但在实际应用中, 以一个属性的偏移结果来评判整个过程的稳定水平, 会产生一定的滞后性, 不能及时发出失控警报。MEWMA- p 控制图相较于EWMA- p 控制图, 利用了更多的信息量, 可以对多个属性进行综合控制, 当过程发生偏移, 能更快地发出失控警报。

4 模拟仿真

4.1 控制限的计算

EWMA- p 控制图的控制限采用 Knoth等^[10]通过随机模拟所得到的 $ARL_0 = 370.4$ 时的控制限 $h_1 = 0.015 118$ 。MEWMA- p 控制图的控制限同样采用随机模拟的方法计算。

1) 令 $h = 0.01$;

2) 生成50 000个服从正态分布的数据, 均值为

$$\mu = (0, 0)^T, \text{ 方差为 } \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0.1 \\ 0.1 & 1 \end{pmatrix};$$

3) 依MEWMA- p 控制图的计算步骤得到统计量

Q_1, Q_2, Q_3, \dots , 若 $Q_i > h$, 记下 t , 否则, 令 $t = t+1$, 继续比较 Q_i 与 h 直至 $Q_i > h$;

4) 将步骤2和步骤3重复10 000次之后, 计算 t 的平均值, 即 ARL_0 的近似值;

5) 若 $ARL_0 < 370$, 则令 $h = h+0.01$, 再返回步骤2, 直至 $370 < ARL_0 < 371$ 。

这样就得到 $ARL_0 = 370.4$ 时二元MEWMA- p 控制图的控制限的近似值 $h_2 = 80.44$, 通过类似的步骤计算得到三元MEWMA- p 控制图的控制限的近似值 $h_3 = 105.10$ 。

4.2 控制图比较

设置使3个控制图 ARL_0 相同的控制限, 通过比较过程失控时EWMA- p 控制图、二元MEWMA- p 控制图和三元MEWMA- p 控制图发出失控警报的速度证明本文方法的有效性。实验假定所监测的3个属性规格上限均为 $USL = 3$, 规格下限均为 $LSL = -3$ 。

首先, 制作三元MEWMA- p 控制图。随机生成

5 000个三元正态分布数据 $X_i = (x_{i1}, x_{i2}, x_{i3})^T$, 均值向量 $\mu_0 = (0, 0, 0)^T$, 协方差矩阵 $\Sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 1 \end{pmatrix}$, 将

5 000个数据分为1 000个子组, 每组5个数据, 得到稳定时不合格品率的均值 μ_p 和协方差矩阵 Σ_p 。接下来, 模拟偏移后的情况, 随机生成500个三元正态分布数据 $X_j = (x_{j1}, x_{j2}, x_{j3})^T$, 均值向量 $\mu_1 = (0.2, 0.2, 0.2)^T$,

协方差矩阵 $\Sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 1 \end{pmatrix}$, 得到过程发生偏

移后的不合格品率 p , 用平滑系数为0.2的MEWMA- p 控制图生成结果如图1所示。

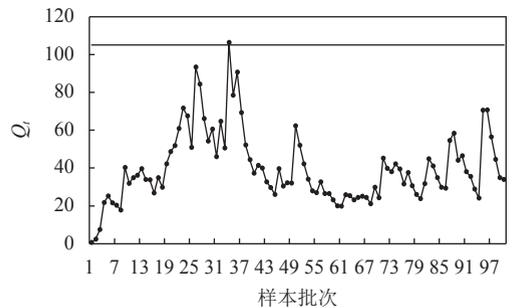


图 1 三元MEWMA- p 控制图

Figure 1 Ternary MEWMA- p control chart

为统一制作3种控制图时所使用的数据, 这里取 X_i 的前两个元素组成 $X'_i = (x_{i1}, x_{i2})^T$, 取 X_j 的前两个元素组成 $X'_j = (x_{j1}, x_{j2})^T$, 用平滑系数为0.2的MEWMA- p 控制图生成的结果如图2所示。类似的, 取 x_{i1} 计算得到稳定时的不合格品率 p_0 , 再取 x_{j1} 计算得到过程发生偏移后的不合格品率 p , 取平滑

系数 $r = 0.2$, 根据式(15)计算EWMA- p 的统计量, 生成的控制图如图3所示。

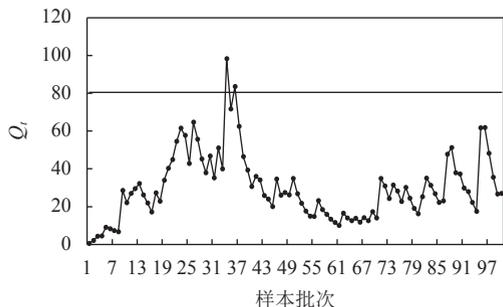


图2 二元MEWMA- p 控制图

Figure 2 Binary MEWMA- p control chart

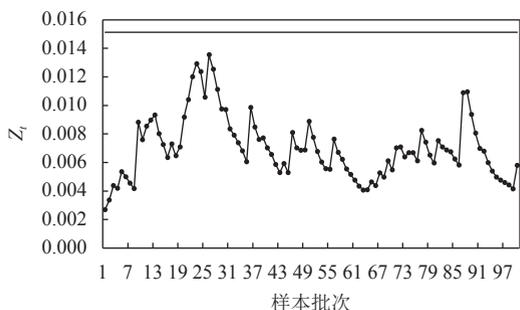


图3 EWMA- p 控制图

Figure 3 EWMA- p control chart

$$\begin{cases} Z_t = rp_t + (1-r)Z_{t-1}; \\ Z_0 = p_0. \end{cases} \quad (15)$$

图1~3均使用 $ARL_0 = 370.4$ 的控制限。由于所采用的数据一致, 3种控制图的大致趋势相同。三元MEWMA- p 控制图和二元MEWMA- p 控制图都在第35个样本批次发出失控警报, 而EWMA- p 控制图在100个样本批次内并未发出警报, 明显MEWMA- p 控制图相较于EWMA- p 控制图在监测中更加灵敏。

5 结论

本文在EWMA- p 控制图的基础上提出应用于多元不合格品率的MEWMA- p 控制图, 从ARL对比、理论说明和模拟仿真3个角度证明MEWMA- p 控制图可以更快检测到过程的偏移。MEWMA- p 控制图考虑到多个属性的相关性, 使得监测偏移的能力加强。实际生产中不合格品率控制图有特定的应用场合, 在这些场合使用MEWMA- p 控制图相较于使用监视均值 μ 和标准差 Σ 的控制图更为方便。此外, 计数值控制图有广泛的应用前景, 本文为计数值控制图升级到多元提供了参考。

参考文献:

- [1] CRAMER H W. Mathematical methods of statistics[M]. Princeton: Princeton University Press, 1946.
- [2] ROBERTS S W. Control chart tests based on geometric moving averages[J]. *Technometrics*, 1959, 1(3): 239-250.
- [3] BROOK D, EVANS D A. An approach to the probability distribution of CUSUM run length[J]. *Biometrika*, 1972, 59(3): 539-549.
- [4] CROSIER R B. A new two-sided cumulative sum quality control scheme[J]. *Technometrics*, 1986, 28(3): 187-194.
- [5] LOWRY C A, WOODALL W H, CHAMP C W, et al. A multivariate exponentially weighted moving average control chart[J]. *Technometrics*, 1992, 34(1): 46-53.
- [6] KRUMBHOLZ W, ZÖLLER A. p-Karten vom Shewhartschen Typ für die messende Prüfung[J]. *Allgemeines Statistisches Archiv*, 1995, 79: 347-360.
- [7] WU Z, TIAN Y. Weighted-loss-function CUSUM chart for monitoring mean and variance of a production process[J]. *International Journal of Production Research*, 2005, 43(14): 3027-3044.
- [8] WU Z, JIAO J. A control chart for monitoring process mean based on attribute inspection[J]. *International Journal of Production Research*, 2008, 46(15): 4331-4347.
- [9] GAN F F. Monitoring observations generated from a binomial distribution using modified exponentially weighted moving average control chart[J]. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 1990, 37(1-2): 45-60.
- [10] KNOTH S, STEINMETZ S. EWMA p charts under sampling by variables[J]. *International Journal of Production Research*, 2013, 51(13): 3795-3807.
- [11] COZZUCOLI C P. Process monitoring with multivariate p -control chart[J]. *International Journal of Quality, Statistics' and Reliability*, 2009, 2009: 1-11.
- [12] 王斌会, 胡志萍. 过程能力指数与不合格品率的关系模型[J]. *数理统计与管理*, 2007, 26(1): 57-61.
WANG Binhui, HU Zhiping. The relation model between process capability index and nonconforming rate[J]. *Application of Statistics and Management*, 2007, 26(1): 57-61.
- [13] 赵凯, 何桢, 张敏. 基于主成分分析和不合格品率的多元过程能力分析[J]. *西北工业大学学报*, 2011, 29(5): 745-750.
ZHAO Kai, HE Zhen, ZHANG Min. Multivariate process capability analysis based on the principal component analysis method[J]. *Journal of Northwestern Polytechnical University*, 2011, 29(5): 745-750.
- [14] 陶靖轩. 关于过程能力指数和不合格品率之间的关系研究[J]. *中国计量学院学报*, 2012, 23(3): 315-318.
TAO Jingxuan. Relationship of process capability index and nonconforming rate[J]. *Journal of China University of Metrology*, 2012, 23(3): 315-318.